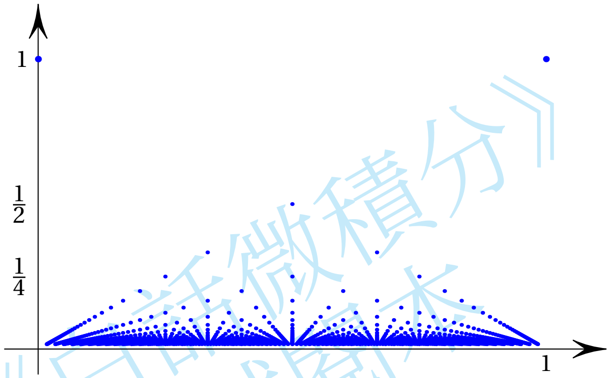
試閱本

1.4 極限的嚴格定義

■ 1.4 極限的嚴格定義

1.4.1 極限的定義

本來在直觀上，我們能夠很容易地了解什麼叫「極限」，於是也能夠解一些極限問題。但是隨著物理學的發展，在數學的應用上所遇到的函數越來越奇怪複雜，開始出現一些直觀上不容易看出極限的函數。舉個例子，1875 年德國數學家 Karl Thomae 寫出爆米花函數 (popcorn function)：



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & ,x\text{ 為非零有理數，其最簡分數為 }\dfrac{m}{n}\\ 0 & ,x\text{ 為無理數}\\ 1 & ,x=0\end{cases}$$

這個函數在所有無理點都是連續的，在所有有理點都不連續。這麼奇怪的行為，你用直觀能看出嗎？若有看出來，有辦法說服別人也接受嗎？微積分剛發展時，是處於較不嚴謹、比較訴諸直觀的草創期，經常飽受攻擊，譬如說對於無窮小的概念，一下說是零，一下又說不是零，造成混亂。牛頓後來甚至捨棄原來說法。雖然因為成功應用在天文、力學等等方面，發揮強大威力，使得越來越多人接受並且投身研究，但發展過程中也多次發現與直觀相悖的事實。就以爆米花函數為例，你原本能想像，居然有這種函數嗎？經過這幾百年下

來，許多數學家幫助將微積分進行嚴格化，這才逐漸形成今日微積分的面貌。今日對於極限的定義，如下：

定義 1.4.1 極限 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ 的嚴格定義

任意給定一個正數 ϵ，皆存在一個正數 δ 使得：只要 $0 < |x-a| < \delta$，便會有 $\left|f(x)-L\right| < \epsilon$。

這就是惡名昭彰的 ϵ-δ 定義了。看得一臉懵嗎？看不懂它在說什麼是相當正常的，有位一流的數學家 Paul R. Halmos (1916-2006)，他在大學時也完全不懂 ϵ-δ 到底在幹嘛。後來一次跟同學的談話中，他突然好像一道光打在頭上，明白了 ϵ-δ 的意義。接著他趕快拿出微積分課本出來重新唸，以前覺得沒有意義的東西突然變得明白了，也能自己證明出一些定理。就這樣，他開始掌握了那些高等數學，後來他便成了數學家。所以，你也不要灰心，不懂是很正常的，也許哪天你開竅了，也跟著成了數學家。

我在此給一些闡釋，以幫助你成為數學家。在此之前，我們先來認識一個人。台灣的政治人物陳定南，曾任宜蘭縣長，後來競選台灣省長失利。他對於部屬嚴格要求，對於包商的工程也吹毛求疵。

好, 現在陳定南讓你做一件事, 你受命選個 $x=a$ 附近的範圍，目的是 $f(x)$ 的值在這範圍與 L 是相當接近的。陳定南說：「我希望誤差值可以小於 10^{-5}。」於是你找出某一個小範圍 $(a-\delta_1, a+\delta_1)$，在這裡面，除了 $x=a$ 的地方 ①，所有的函數值，其與 L 的誤差 $\left|f(x)-L\right|$ 的確全都比 10^{-5} 來得小。你就很高興地交件，但陳定南皺一皺眉，說：「不不不，我覺得還是讓誤差值小於 10^{-8} 會比較好，你重做一次吧。」在 $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ 內，某些函數值的誤差有小於 10^{-8}，但有些地方沒有，怎麼辦呢？於是你就把範圍再縮小，變成 $(a-\delta_2, a+\delta_2)$。在這裡面的所有函數值，其與 L 的誤差的確完全都比 10^{-8}

① 極限只是在處理 x 很靠近 a 時的行為，與 $x=a$ 之處無關，所以要強調是除了 $x=a$ 的地方。但為了行文簡便，後面不再贅述這句，我們都心知肚明是除了 $x=a$ 的地方就好。

還小。你鬆了一口氣，又再度交件。此時，陳定南又 ⋯

因為 $x \to a$ 時，$f(x)$ 的確趨近 L。所以每當陳定南又把條件改更嚴格時，你只要把你的範圍再縮得更小，就可以讓誤差值足夠小。假如你們做另一個函數，當陳定南要求誤差值小於 10^{-37} 時，你發現不管如何縮小，總會有某些時候誤差超出 10^{-37}。那就代表，事實上在 $x \to a$ 時，$f(x)$ 並不會趨近到 L。

與陳定南共事完以後，現在我們回過頭看，ϵ-δ 定義為什麼會這樣講呢？本來口語點來講，只要 x 與 a 無限地靠近，就能使 $f(x)$ 值與 L 誤差要多小就有多小。好啦，既然你說要多小就有多小，那就隨我要求都可以啦。不管我訂了如何嚴苛的誤差標準 ϵ。你都可以回答我，在與 a 的差距在 δ 以內所有不等於 a 的 x 值，它們的函數值的確滿足我的誤差標準。如果我把誤差標準 ϵ 訂得更嚴格，那你只要把你的 δ 跟著縮小，便可滿足誤差標準。無論我的 ϵ 是多麼小多麼小的一個正數，你都可以找到相應的 δ 來滿足誤差標準。這句話被數學家寫成形式化的定義，就變成這個面貌啦！

note

誤差 (error) 第一個字母 e，對應到希臘文就是 ϵ，故符號選用 ϵ。差距 (difference) 第一個字母 d，對應到希臘文就是 δ，所以符號就選用 δ。

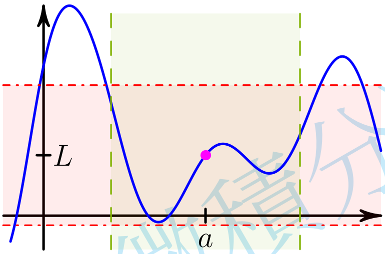
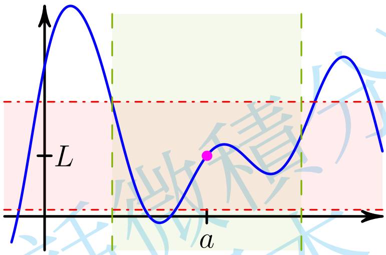
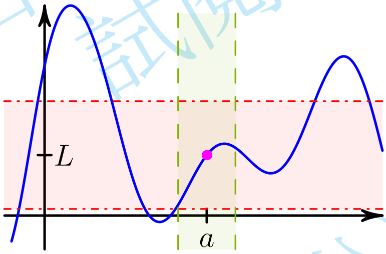


圖 1.1:

接著用圖來闡釋，水平線是誤差要求，希望 $f(x)$ 可以完全落在兩條水平線之間。鉛直則是相應找出來的範圍，希望範圍內的 $f(x)$ 值完全落在兩條水平線間。



(a)



(b)

圖 1.2: 誤差要求

由圖 1.2a 可見，現在誤差要求嚴格到一個程度，讓鉛直線範圍內的 $f(x)$ 值沒有完全落在兩條水平線之間，有些地方跑出去。此時怎麼辦呢？只要將鉛直線往內縮，讓這範圍縮小一點，如圖 1.2b，此時又成功地讓 $f(x)$ 值完全落在兩條水平線之間啦！如果再變得更嚴格，把水平線拉得更近，可能你的範圍又不適用了！如圖 1.3a，此時範圍內的 $f(x)$ 值又有些跑出去了。那你就再繼續把範圍縮得更小，如圖 1.3b，便又滿足啦！

等一下就算再把水平線拉近你也不怕，只要跟著再把鉛直線也拉更近就好了。

反過來說，極限不存在就一定不滿足定義，讓我們來想一下定義的反面敘述。原本定義的敘述是，任給 ϵ，都找得到相應的 δ 來滿足誤差要求。換句話說，水平線不管拉多近，都可相應地找鉛直線，讓範圍內的 $f(x)$ 值完全落在水平線之間。那麼它的反面敘述就是，誤差要求 ϵ 嚴格到一個程度，你就找不到相應的 δ 了。換句話說，水平線拉近到一個程度，你會發現，鉛直線不管怎麼拉，範圍內的 $f(x)$ 都會有至少一部份跑出去。

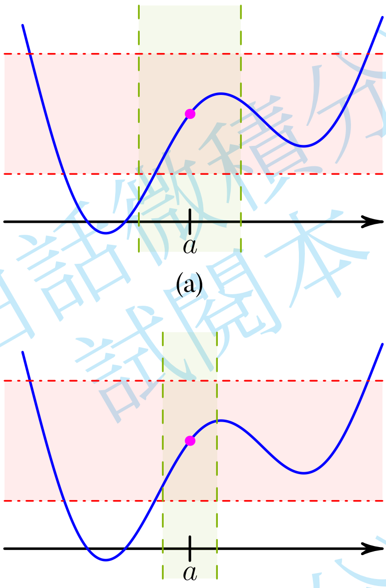


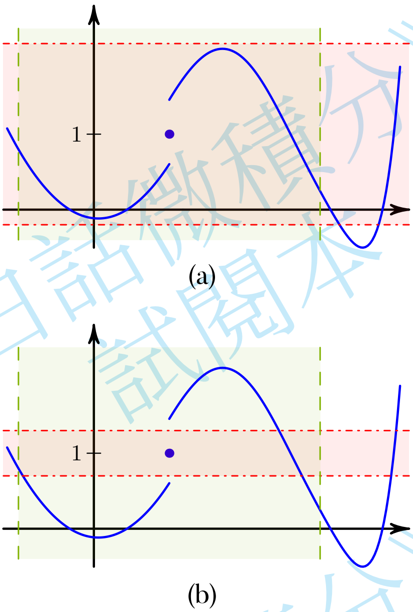
圖 1.3: 更嚴格的誤差要求

接著來看極限不存在的圖。下面函數是否 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ 呢？圖 1.4a，一開始水平線還沒拉太近，你還是可以找一個範圍滿足要求。但是水平線近到一個程度後，如圖 1.4b。此時不管鉛直線怎麼拉，範圍內的 $f(x)$ 全都在水平線以外，不滿足誤差要求！這時果然不滿足極限的定義。

接著再看另一種極限不存在的類型，它在 x 接近 0 時不斷地來回震盪。圖 1.5a，一樣地，一開始水平線還沒拉很近，你還是可以找一個範圍滿足要求。但是水平線近到一個程度以後，如圖 1.5b。你會發現，此時不管虛線怎麼拉，都會有些 $f(x)$ 跑出紅色線以外，不滿足誤差要求！這個極限不存在的函數果然也不滿足極限的定義。

文學家哥德說：「數學家猶如法國人，無論你對他們說什麼，他們把它翻譯成自己的語言，於是就成了全然不同的東西。」

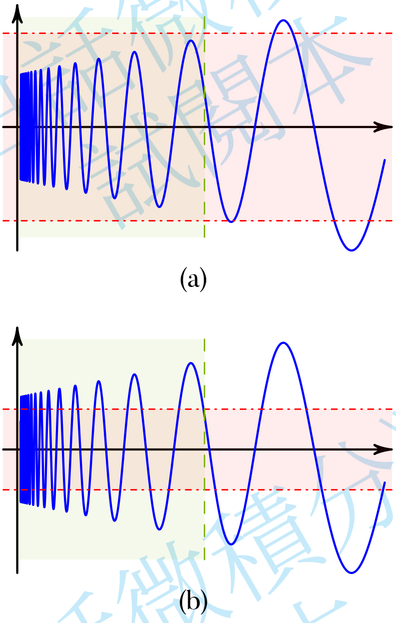
以上所介紹都是 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ 的定義。至於其它形



(a)

(b)

圖 1.4: 極限不存在



(a)

(b)

圖 1.5: 極限不存在

式的極限定義，其精神也是相仿：

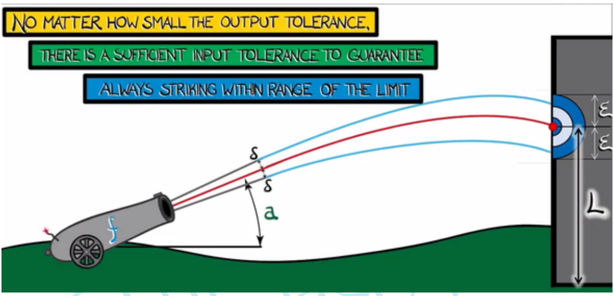


圖 1.6:

定義 1.4.2 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ 的定義

任意給定一正數 ϵ，皆存在一正數 N 使得：只要 $x > N$，便有 $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$。

口語來說，隨著 x 趨向無窮大，$f(x)$ 就會無限地接近 L。也就是說，只要 x 夠大，便可讓 $f(x)$ 與 L 之間的誤差足夠小。所以給定誤差要求 ϵ，我就可以找到夠大的 N，任何在 $x = N$ 右方的 x，其函數值 $f(x)$ 都滿足誤差要求。

定義 1.4.3 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ 的定義

任意給定一正數 M，皆存在一正數 δ 使得：只要 $0 < |x - a| < \delta$，便有 $f(x) > M$。

隨著 x 趨近 a，$f(x)$ 值會越來越大，趨向無窮大。所以無論你要求 $f(x)$ 要超過多大的數 M，不管是一萬那麼大、一千萬那麼大，我都可以找到 a 附近一個夠小的範圍，這裡的函數值 $f(x)$ 都大於 M。

定義 1.4.4 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 的定義

任意給定一正數 M，皆存在一正數 N 使得：只要 $x > N$，便有 $f(x) > M$。

隨著 x 越來越大、趨向無窮大，$f(x)$ 值也越來越大、趨向無窮大。那麼無論你要求超過多大的數 M，我

都能找到一個足夠大的 N，只要 x 比 N 大，$f(x)$ 值就會大於 M。

定義 1.4.5 $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ 的定義

任意給定一正數 ϵ，皆存在一正數 δ 使得：只要 $0 < x - a < \delta$，便有 $|f(x) - L| < \epsilon$。

右極限就是 x 從比 a 大的地方趨近到 a。所以我們將原定義中 $x - a$ 外的絕對值拆掉，就會是這樣的意思了。

定義 1.4.6 數列極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 的定義

任意給定一正數 ϵ，皆存在一正數 N 使得：只要 $n > N$，便有 $|a_n - L| < \epsilon$。

數列極限的定義，寫起來跟函數極限的版本幾乎是一樣的。

1.4.2 用極限定義作證明

現在我們已經有極限的嚴格定義，如果想證明 $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$，就只要跑一次定義就好了。我只須說明，任給 ϵ，我都能找到相應的 δ。使得只要 $0 < |x-3| < \delta$ 就能保證 $|f(x) - 7| < \epsilon$。但我總不可能列一張表格，說如果 ϵ 給多少，δ 就取多少，根本列不完。所以當我們使用定義做證明時，常是直接寫一個函數 $\delta(\epsilon)$，來表達一般而言 δ 要如何因應著 ϵ 而取。舉個例子，我告訴你我只要取 $\delta = \frac{\epsilon}{4}$，就會符合定義，所以極限是 L。那麼不管你給 $\epsilon = 0.01$ 或是 $\epsilon = 10^{-7}$，我一律將其除以四，就是我給你的 δ，這叫一勞永逸。

例題 1.4.1 證明 $\lim_{x\to 1}(3x+4) = 7$

解

我們的目的是要找出適當的 δ，以便由 $0<|x-1|<\delta$ 保證 $\left|(3x+4)-7\right|<\epsilon$。我們先將我們的目標 $\left|(3x-4)-7\right|$ 作一番分析整理:

$$\left|(3x+4)-7\right| = |3x-3| = 3\,|x-1|$$

整理後發現剛好有 $|x-1|$。使用 $0<|x-1|<\delta$，便有

$$3\,|x-1|<3\delta$$

目前為止，我們有 $\left|(3x+4)-7\right|<3\delta$，但我們目標是 $(3x+4)-7<\epsilon$。要如何補個臨門一腳來達成目的呢？我們知道若 $A<B$ 且 $B<C$，那麼 $A<C$；或是 $A<B$ 且 $B=C$，也可以得出 $A<C$ 的結論。於是我們取 $\delta=\frac{\epsilon}{3}$，則

$$3\,|x-1|<3\delta=3\cdot\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$$

這樣便成功了，我們導出了 $\left|(3x+4)-7\right|<\epsilon$。而之所以成功地導到此一結論，是由於我們取 $\delta=\frac{\epsilon}{3}$。換句話說，我們說明了，只要一律取 $\delta=\frac{\epsilon}{3}$，便可由 $0<|x-1|<\delta$ 保證 $\left|(3x+4)-7\right|<\epsilon$。

從此題可見，我們的方向是要由 $0<|x-a|<\delta$ 出發，接著導出 $\left|f(x)-L\right|<\epsilon$ 的結論。所用手法是先找出一個中介的 A，使得 $\left|f(x)-L\right|<A<\epsilon$，或者 $\left|f(x)-L\right|<A=\epsilon$。而這個 $\left|f(x)-L\right|<A$ 要如何取，就是先將 $\left|f(x)-L\right|$ 作一番整理，然後配合 $0<|x-a|<\delta$。接著再適當地取 $\delta(\epsilon)$ 來達成 $A\le\epsilon$。以下我再多舉幾題來讓你好好地體會。

例題 1.4.2 證明 $\lim_{x\to 3}(2x-1)=5$

解

先分析

$$\left|(2x-1)-5\right| = |2x-6| = 2\,|x-3| < 2\delta$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$，則

$$2\delta = 2\cdot\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

在作答的時候我們不見得要以和思考過程完全一樣的順序謄上。也就是說，實際作答你可以先偷偷在旁邊做上面那樣的運算，知道了 δ 該如何取以後，便這樣寫：

取 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$，則只要 $0 < |x-3| < \delta$，便有

$$\left|(2x-1)-5\right| = |2x-6| = 2\,|x-3| < 2\delta = 2\cdot\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

例題 1.4.3 證明 $\lim\limits_{x\to -2} 4x = -8$

解

$$\left|4x-(-8)\right| = |4x+8| = 4\,|x+2| < 4\delta$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{4}$，則只要 $0 < |x+2| < \delta$，便有

$$4\,|x+2| < 4\delta = \epsilon$$

例題 1.4.4 證明 $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x) = 0$

解

$\left|\sin(x)\right| < \epsilon$ 與 $0 < |x| < \delta$ 該如何牽扯上關係呢？我們可以利用 $\left|\sin(x)\right| \le |x|$ 這個不等式。於是取 $\delta = \epsilon$，則只要 $0 < |x| < \delta$，便有

$$\left|\sin(x)\right| \le |x| < \delta = \epsilon$$

例題 1.4.5 證明 $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$

解

任給 $N>0$，取 $\delta=\frac{1}{\sqrt{N}}$，則只要 $0<|x-3|<\delta$，便有

$$\frac{1}{(x-3)^2}>\frac{1}{\delta^2}=\frac{1}{\frac{1}{N}}=N$$

例題 1.4.6 證明 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

解

任給 $\epsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\epsilon}$，則只要 $x>N$，便有

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{N}=\epsilon$$

有關 $\delta(\epsilon)$ 的取法，並沒有一個標準的答案，只要它可以幫助導出 $|f(x)-L|<\epsilon$ 的結論即可。比方說你取 $\delta=\frac{\epsilon}{3}$ 是可以的，那如果你想取更小的 $\delta=\frac{\epsilon}{7}$，當然也可以。本來 $0<|x-a|<\frac{\epsilon}{3}$ 的範圍內的函數值全部都符合誤差標準，那我自己把這範圍縮小，$0<|x-a|<\frac{\epsilon}{7}$ 這個較小的範圍本身就完全包含在上一個範圍內，所以也同樣是滿足「其內所有函數值都符合誤差要求」這句話。明白的話便可以來看下面這一題較難一點的。

例題 1.4.7 證明 $\lim_{x\to 2}x^2=4$

解

$$\left|x^2-4\right|=|x+2||x-2|<|x+2|\delta$$

我們有 $0<|x-2|<\delta$，卻沒有關於 $|x+2|$ 的不等式可以使用，怎麼辦呢？我們現在要想辦法，讓 $|x+2|$

小於某個東西，這樣才有辦法繼續下去。這一招就是：假設 $\delta \le 1$。我們絕對可以這麼做，因為如果某些時候所取的 δ 比 1 來得大，那麼我縮小範圍，取更小的 δ，使它小於等於 1，那也是可以符合誤差要求的。

這樣一來，$0<|x-2|<\delta \le 1$。拆開絕對值，$1<x<3, x\ne 2$，同時加 2，$3<x+2<5, x+2\ne 4$。寫成這樣以後，我們便知道 $|x+2|$ 是小於 5 的，於是就可以繼續寫下去

$$|x+2|\delta < 5\delta$$

此時取 $\delta = \frac{\epsilon}{5}$，則只要 $0<|x-2|<\delta$，便有

$$\left|x^2-4\right| = |x+2||x-2| < 5\delta = \epsilon$$

像這樣寫呢，就錯啦！大致架構是對的，但要記住：我們之所以一路過關斬將，推出誤差小於 ϵ，是依賴 $\delta \le 1$ 這關鍵一招，後續都是建立在此前提之下的。所以，萬一這個任給的 ϵ 是 6，那我們的 δ 就是 $\frac{6}{5}>1$。便不滿足 $\delta \le 1$，於是後面也就跟著不成立了。這樣該怎麼辦呢？還記得剛剛說的嗎？如果某些時候所取的 δ 比 1 來得大，那麼我也可以取更小的 δ，使它不超過 1。所以我只要在剛剛所寫的「取 $\delta = \frac{\epsilon}{5}$」作些修改，變成「取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}$」意思是說 1 與 $\frac{\epsilon}{5}$ 誰比較小，δ 就取那個值。這樣一來，當 $\frac{\epsilon}{5}$ 不大於 1 時，δ 就是取 $\frac{\epsilon}{5}$，完全沒問題；而當 $\frac{\epsilon}{5}$ 比 1 還大時，δ 就是取 1，這樣取一方面滿足 $\delta \le 1$，另一方面，此時 δ 比 $\frac{\epsilon}{5}$ 來得小，所以也可滿足誤差要求。

例題 1.4.8 證明 $\lim_{x\to 9}\sqrt{x}=3$

解

$$|\sqrt{x}-3| = \frac{|x-9|}{|\sqrt{x}+3|} < \frac{\delta}{\sqrt{x}+3}$$

現在我們遇到一個問題，$\sqrt{x}+3$ 該怎麼處理掉？由於它在分母，所以我們要看它會大於誰。設 $\delta \le 1$，於是 $0 < |x-9| < \delta \le 1$, $8 < x < 10, x \ne 9$, 接著開根號，$\sqrt{8} < \sqrt{x} < \sqrt{10}, x \ne 9$。從此處我們知道 $\sqrt{x} > \sqrt{8}$，為簡便起見也可以寫 $\sqrt{x} > 2$。無所謂嘛，既然會比 $\sqrt{8}$ 大那當然也會比 2 還大。於是有 $\sqrt{x}+3 > 5$，我們便可以繼續寫下去:

$$\frac{\delta}{\sqrt{x}+3} < \frac{\delta}{5}$$

現在取 $\delta = 5\epsilon$，於是

$$\frac{\delta}{\sqrt{x}+3} < \frac{\delta}{5} = \epsilon$$

記得我們先假設了 $\delta \le 1$，所以要修改一下，改取 $\delta = \min\{1, 5\epsilon\}$。正式過程可以寫:

若 $\delta \le 1$，則 $0 < |x-9| < \delta \le 1 \quad \Rightarrow 8 < x < 10, x \ne 9 \quad \Rightarrow \sqrt{8} < \sqrt{x} < \sqrt{10}, x \ne 9$。所以 $\sqrt{x} > 2$，$\sqrt{x}+3 > 5$。取 $\delta = \min\{1, 5\epsilon\}$，於是只要 $0 < |x-9| < \delta$，便有

$$\left|\sqrt{x}-3\right| = \frac{|x-9|}{\left|\sqrt{x}+3\right|} < \frac{\delta}{5} \le \epsilon$$

例題 1.4.9 證明 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

解

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|3-x|}{|3x|} < \frac{\delta}{|3x|}$$

假設 $\delta \le 1$，$0 < |x-3| < \delta \le 1 \quad \Rightarrow 2 < x < 4, x \ne 3 \quad \Rightarrow$

$3x > 6$。於是

$$\frac{|3-x|}{|3x|} < \frac{\delta}{6}$$

取 $\delta = \min\{1, 6\epsilon\}$，於是只要 $0 < |x-3| < \delta$，便有

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|3-x|}{|3x|} < \frac{\delta}{6} \le \epsilon$$

例題 1.4.10 證明 $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

解

$$\left|x^3 - 8\right| = |x-2|\left|x^2+2x+4\right| < \left|x^2+2x+4\right|\delta$$

假設 $\delta \le 1$，$0 < |x-2| < \delta \le 1 \Rightarrow 1 < x < 3, x \ne 2 \Rightarrow 2 < x+1 < 4, x \ne 2 \Rightarrow 4 < (x+1)^2 < 16, x \ne 2$, 最後便可得知 $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 < 19$。取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{19}\}$，於是只要 $0 < |x-2| < \delta$，便有

$$|x-2|\left|x^2+2x+4\right| < 19\delta \le \epsilon$$

例題 1.4.11 證明 $\lim_{x\to 2} x^3 - x^2 - x = 2$

解

$$\left|x^3 - x^2 - x - 2\right| = |x-2|\left|x^2+x+1\right|$$

不必擔心因式分解，因為一定有 $x-2$ 這個因式那麼剩下用除的就出來了。現在我們設 $\delta \le 1$，$0 < |x-2| < \delta \le 1 \Rightarrow 1 < x < 3, x \ne 2 \Rightarrow 1 < x^2 < 9, x \ne 2$，則 $x^2+x+1 \le 13$。於是取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{13}\}$，那麼只要 $0 < |x-2| < \delta$，便有

$$|x-2|\left|x^2+x+1\right| < 13\delta \le \epsilon$$

例題 1.4.12 若 $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$,
證明 $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = L+M$

解

給定 $\frac{\epsilon}{2} > 0$，存在兩正數 δ_1 及 δ_2，只要 $0 < |x-a| < \delta_1$，便有 $\big|f(x)-L\big| < \frac{\epsilon}{2}$；只要 $0 < |x-a| < \delta_2$，便有 $\big|g(x)-M\big| < \frac{\epsilon}{2}$。我們現在目的是，由這個前提出發，推論到：任給 $\epsilon > 0$，都存在正數 δ，只要 $0 < |x-a| < \delta$，便有 $\Big|\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)\Big| < \epsilon$。

開始寫了！任給 $\epsilon > 0$，取 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$，只要 $0 < |x-a| < \delta$，便有

$$\Big|\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)\Big| = \Big|\big(f(x)-L\big)+\big(g(x)-M\big)\Big|$$

現在我要用一招，看清楚了，這叫三角不等式
$\big(\big|A+B\big| \le \big|A\big| + \big|B\big|\big)$

$$\le \Big|f(x)-L\Big| + \Big|g(x)-M\Big|$$
$$\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

因為我們 δ 是取 δ_1 及 δ_2 當中較小的，所以一旦滿足 $0 < |x-a| < \delta$，便是同時滿足 $0 < |x-a| < \delta_1$ 與 $0 < |x-a| < \delta_2$，於是同時有 $\big|f(x)-L\big| < \frac{\epsilon}{2}$ 及 $\big|g(x)-M\big| < \frac{\epsilon}{2}$。

例題 1.4.13 證明夾擠定理： 若在 a 附近皆有
$f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$
則 $\lim_{x\to a} g(x) = L$。

解

給定 $\epsilon > 0$，存在兩正數 δ_1 及 δ_2，使得只要 $0 < |x-a| < \delta_1$，便有 $\left|f(x)-L\right| < \epsilon$；只要 $0 < |x-a| < \delta_2$，便有 $\left|h(x)-L\right| < \epsilon$。

在 a 附近皆有 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，意思是說有個橫跨 a 點的開區間，然後再把 a 點本身挖掉，在這範圍內都有 $f(x) \le g(x) \le h(x)$。換句話說，存在 $\delta_3 > 0$，只要 $0 < |x-a| < \delta_3$，便有 $f(x) \le g(x) \le h(x)$。若取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$，則只要 $0 < |x-a| < \delta$ [a]，便有

$$L - \epsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \epsilon$$

也就是說，$\left|g(x)-L\right| < \epsilon$。

[a] 那麼 $0 < |x-a| < \delta_1$ 與 $0 < |x-a| < \delta_2$ 及 $0 < |x-a| < \delta_3$ 就都滿足了！所以 $\left|f(x)-L\right| < \epsilon$ 與 $\left|h(x)-L\right| < \epsilon$ 及 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 就都成立了！